1. Równanie różniczkowe liniowe

Definicja 1. Równanie różniczkowe typu

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{1}$$

gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są danymi funkcjami ciągłymi na przedziale $X \subset \mathbb{R}$, nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego*. Jeżeli $q(x) \equiv 0$ na X, to równanie

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2}$$

nazywamy *liniowym jednorodnym*. W przeciwnym przypadku równanie (1) nazywamy *liniowym niejednorodnym.*

Równanie (2) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Rzeczywiście, rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Wtedy

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx.$$

Stąd

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|.$$

Więc rozwiązanie ogólne równania liniowego jednorodnego ma postać

$$y = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}, \tag{3}$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą różną od zera. Zauważmy, że funkcja $y = 0$ jest rozwiązaniem równania (2) i rozwiązanie to można otrzymać z rozwiązania (3), jeżeli dopuścimy warunek $C = 0$. Zatem funkcja $y(x)$ postaci (3) jest rozwiązaniem równania (2) dla każdego $C \in \mathbb{R}$.

W celu rozwiązania równania liniowego niejednorodnego stosujemy *metodę uzmienniania stałej.* Ta metoda opiera się na założeniu, że szukane ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego (1) ma postać rozwiązania (3), w którym C jest nieznaną funkcją zmiennej x (tzn. „uzmienniamy" stałą w rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego). Mianowicie

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} . \tag{4}$$

Załóżmy, że funkcja $C(x)$ jest różniczkowalną na X . Wtedy mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} + C(x)\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\right)$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} .$$

Po wstawieniu tej pochodnej oraz funkcji (4) do równania (1) otrzymamy

$$\frac{dC(x)}{dx}\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x) .$$

Stąd

$$\frac{dC}{dx} = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx} .$$

Otrzymane równanie różniczkowe względem $C(x)$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Zatem rozdzielając zmienne mamy

$$\int dC = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\, dx ,$$

a więc

$$C(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\, dx + C_1 .$$

Po wstawieniu do równania (4) dostajemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) w postaci

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} + \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\, dx , \tag{5}$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą.

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x\mathrm{e}^{x} . \tag{6}$$

Rozwiązanie. Na początku znajdziemy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 .$$

Rozdzielając zmienne mamy

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Zatem

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Więc rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$y = Cx.$$

Zgodnie z metodą uzmienniania stałej rozwiązania ogólnego równania (6) szukamy w postaci

$$y = C(x)x.$$

Wtedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}x + C(x).$$

Po podstawieniu do równania (6) otrzymamy

$$\frac{dC(x)}{dx}x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x\mathrm{e}^x.$$

Stąd

$$dC = \mathrm{e}^x\,dx.$$

Całkując obustronnie mamy

$$C(x) = \mathrm{e}^x + C_1,$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą. Tak więc rozwiązanie ogólne równania (6) ma postać

$$y = C_1x + x\mathrm{e}^x.$$

Zauważmy, że rozwiązanie ogólne (5) równania liniowego niejednorodnego (1) możemy przedstawić w postaci

$$y = y_0 + y_1, \tag{7}$$

gdzie

$$y_0 = C_1\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (2), a funkcja

$$y_1 = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\,dx$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania (1).

Twierdzenie 1. Wzór (7) opisuje wszystkie rozwiązania równania liniowego niejednorodnego (1).

Z tego twierdzenia wynika, ze dla rozwiązania równania (1) wystarczy znaleźć jakiekolwiek rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego i dodać do niego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (2). Dla pewnych typów równań (1) rozwiązanie szczególne można znaleźć stosunkowo łatwo tak zwaną *metodą przewidywania.* Omówimy kilka standardowych „przewidywań" postaci rozwiązania szczególnego. Rozważmy szczególny przypadek równania (1), mianowicie

$$\frac{dy}{dx} + px = q(x), \text{ gdzie } p \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Jeżeli $q(x)$ jest wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$, to rozwiązanie szczególne y_1 równania (8) przewidujemy w postaci wielomianu tego samego stopnia n z niewiadomymi współczynnikami.

Przykład 2. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2.$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie szczególne y_1 przewidujemy w postaci

$$y_1 = ax^2 + bx + c, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

i podstawiamy do naszego równania. Otrzymamy równość

$$2ax + 2b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2.$$

Zatem porównując współczynniki wielomianów po prawej i lewej stronie dostajemy układ równań z niewiadomymi a, b, c postaci

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ 2a + 2b = 0, \\ b + 2c = 0. \end{cases}$$

Stąd

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{4}.$$

Zatem szukanym rozwiązaniem szczególnym naszego równania jest funkcja

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Jeżeli prawa strona równania (8) ma postać

$$q(x) = a\mathrm{e}^{bx}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

to rozwiązanie szczególne y_1 równania (8) szukamy w postaci

$$y_1 = m\mathrm{e}^{bx}, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2\mathrm{e}^{3x}. \tag{9}$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie szczególne y_1 szukamy w postaci

$$y_1 = m\mathrm{e}^{3x}.$$

Stąd

$$\frac{dy_1}{dx} = 3m\mathrm{e}^{3x}.$$

Podstawiając do równania (9) mamy

$$3m\mathrm{e}^{3x} + 2m\mathrm{e}^{3x} = 2\mathrm{e}^{3x}.$$

Zatem

$$3m + 2m = 2,$$

$$m = \frac{2}{5}.$$

Więc

$$y_1 = \frac{2}{5}\mathrm{e}^{3x}$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania (9).

Obliczamy teraz rozwiązanie ogólne y_0 równania jednorodnego

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Rozdzielając zmienny i całkując obustronnie mamy

$$\frac{dy}{y} = -2dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx,$$

$$\ln|y| = -2x + \ln|C|.$$

Wtedy

$$y_0 = C\mathrm{e}^{-2x}.$$

Tak więc rozwiązanie ogólne równania (9) ma postać

$$y = y_0 + y_1 = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{3x}.$$

Jeżeli prawa strona równania (8) ma postać

$$q(x) = a\sin\alpha x + b\cos\alpha x, \qquad a,\, b,\, \alpha \in \mathbb{R},$$

to rozwiązania szczególnego y_1 równania (8) szukamy w postaci

$$y_1 = m\sin\alpha x + n\cos\alpha x.$$

Przykład 4. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5\sin 3x. \tag{10}$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie szczególne y_1 szukamy w postaci

$$y_1 = m\sin 3x + n\cos 3x.$$

Różniczkując mamy

$$\frac{dy_1}{dx} = 3m\cos 3x - 3n\sin 3x.$$

Wstawiamy y_1 i $\dfrac{dy_1}{dx}$ do równania (10). Mamy

$$(3m + 2n)\cos 3x + (2m - 3n)\sin 3x = 5\sin 3x.$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 3m + 2n = 0, \\ 2m - 3n = 5. \end{cases}$$

Zatem

$$m = \frac{10}{13}, \quad n = -\frac{15}{13}.$$

A więc rozwiązanie szczególne równania (10) ma postać

$$y_1 = \frac{10}{13}\sin 3x - \frac{15}{13}\cos 3x.$$

Zauważmy, że rozwiązanie ogólne równania (10) ma postać

$$y = y_0 + y_1 = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{10}{13}\sin 3x - \frac{15}{13}\cos 3x.$$

Przykład 5. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 25x^2\,\mathrm{e}^{3x}. \tag{11}$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie szczególne y_1 przewidujemy w postaci

$$y_1 = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{3x}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Różniczkując otrzymamy

$$\frac{dy_1}{dx} = (2ax + b)\mathrm{e}^{3x} + 3(ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{3x}.$$

Podstawiając do równania (11) po prostych przekształceniach mamy

$$5ax^2\,\mathrm{e}^{3x} + (2a + 5b)x\,\mathrm{e}^{3x} + (b + 5c)\mathrm{e}^{3x} = 25x^2\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Uwzględniając współczynniki po prawej i lewej stronie otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 5a = 25, \\ 2a + 5b = 0, \\ b + 5c = 0. \end{cases}$$

Stąd

$$a = 5, \; b = -2, \; c = \frac{2}{5}.$$

Rozwiązanie szczególne równania (11) ma więc postać

$$y_1 = \left(5x^2 - 2x + \frac{2}{5}\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

Zatem szukanym rozwiązaniem ogólnym (zob. przykład 4.15) jest funkcja

$$y = y_0 + y_1 = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \left(5x^2 - 2x + \frac{2}{5}\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

2. Równanie różniczkowe Bernoulliego

Definicja 2. Równanie różniczkowe typu

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{12}$$

gdzie p, q są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale $X \subset \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\alpha \neq 0, 1$, nazywamy *równaniem Bernoulliego.*

Zauważmy, że dla $\alpha = 0$ równanie (12) jest równaniem liniowym niejednorodnym postaci (1). Z kolei dla $\alpha = 1$ mamy równanie o rozdzielonych zmiennych postaci

$$\frac{dy}{dx} + (p(x) - q(x))y = 0.$$

Stosując podstawienie

$$z = y^{1-\alpha}$$

równanie Bernoulliego sprowadza się do równania liniowego niejednorodnego. Rzeczywiście, różniczkując mamy

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}.$$

Zapisując teraz równanie (12) w postaci

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

i zmieniając zmienne otrzymamy

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Równanie to jest równaniem liniowym niejednorodnym postaci (1). Zauważmy ponadto, że jeżeli $\alpha > 0$, to równanie (12) ma rozwiązanie $y = 0$.

Przykład 6. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} + xy = (xy)^3. \tag{13}$$

Rozwiązanie. Równanie (13) jest równaniem Bernoulliego przy czym $\alpha = 3$. Tak więc funkcja $y = 0$ jest jednym z rozwiązań tego równania. Niech $y \neq 0$ i podzielimy obie strony równania (13) przez y^3.

Mamy

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3.$$

Stąd po podstawieniu

$$z = y^{-2}, \qquad \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

otrzymamy równanie liniowe niejednorodne postaci

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = x^3$$

czyli

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3. \tag{14}$$

Zatem rozwiązujemy równanie liniowe jednorodne

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = 0.$$

Rozdzielając zmienne i całkując mamy

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int x dx.$$

Zatem

$$\ln|z| = x^2 + \ln|C|,$$

czyli

$$z = C\mathrm{e}^{x^2}.$$

Stosując metodę uzmienniania stałej, rozwiązania ogólnego równania (14) szukamy w postaci

$$z = C(x)\mathrm{e}^{x^2}.$$

Różniczkując mamy

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dC}{dx}\mathrm{e}^{x^2} + 2xC(x)\mathrm{e}^{x^2}.$$

Po podstawieniu do równania (14) otrzymamy

$$\frac{dC}{dx}\mathrm{e}^{x^2} + 2xC(x)\mathrm{e}^{x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{x^2} = -2x^3,$$

czyli

$$\frac{dC}{dx} = -2x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Całkując obustronnie

$$\int dC = -2\int x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

mamy

$$C(x) = (1 + x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} + C_1 .$$

Tak więc

$$z = \left((1 + x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} + C_1\right)\mathrm{e}^{x^2} ,$$

czyli rozwiązanie ogólne (14) możemy zapisać w postaci

$$z = 1 + x^2 + C_1\,\mathrm{e}^{x^2} .$$

Zatem wracając do zmiennej y otrzymamy rozwiązanie ogólne równania (13) postaci

$$y = \left(1 + x^2 + C_1\,\mathrm{e}^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać równania liniowe niejednorodne:

1. $xy' - 2y = 2x^2$;

2. $(2x+1)\,y' = 4x + 2y$;

3. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$;

4. $\dfrac{dy}{dx} - y = 2\mathrm{e}^{x}$;

5. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = \cos 2x$;

6. $\dfrac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$;

7. $x\dfrac{dy}{dx} = xy + \mathrm{e}^{x}$;

8. $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy + 1 = 0$;

9. $y' - 2y = 2x^2 + 1$;

10. $y' + 3y = 3x^2 + 2x + 1$;

11. $2y' - y = 2x^3 + 6$;

12. $y' - 2y = 3\mathrm{e}^{-2x}$;

13. $y' + y = (x+2)\mathrm{e}^{3x}$;
14. $y' - 5y = (2x^2+1)\mathrm{e}^{x}$;
15. $y' - 2y = \sin x + 2\cos x$;
16. $y' + 4y = \cos 4x$;
17. $y' - 3y = 3\sin 2x + 2\cos 2x$;
18. $y' - 2y = \sin x + \cos 3x$;

Rozwiązać równania Bernoulliego:

19. $y' + 2y = y^2\,\mathrm{e}^{x}$;
20. $(x+1)(y' + y^2) + y = 0$;
21. $xy^2y' = x^2 + y^3$;
22. $xydy = (y^2 + x)dx$;
23. $y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}\,x$;
24. $xyy' = x^2 + y^3$;
25. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch